第 52 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 2
2013 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2013

二阶非线性椭圆型微分方程新的振动准则*

林全文[1]，庄容坤[2]
（1. 广东石油化工学院数学系，广东 茂名 525000；
2. 惠州学院数学系，广东 惠州 516007）

摘 要：利用新的核函数对如下非线性椭圆型方程

$$\nabla \cdot (A(x) \nabla y) + q(x) f(y) = e(x), x \in \Omega$$

建立了若干新的振动准则，其中 Ω 是 R^n 中外区域。所得结果比现有的结论有更高的一般性，并得到解的零点分布的信息。

关键词：非线性椭圆型微分方程；偏 Riccait 变换；振动性；区域准则

中图分类号：O175.10 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2013）02-0057-05

New Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Elliptic Differential Equations

LIN Quanwen[1], *ZHUANG Rongkun*[2]
（1. Department of Mathematics, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China;
2. Department of Mathematics, Huizhou University, Huizhou 516007, China）

Abstract: By means of a new technique based on a class of functions $H(r,s,l)$, new oscillation criteria are established for the second order nonlinear elliptic differential equation

$$\nabla \cdot (A(x) \nabla y) + q(x) f(y) = e(x), x \in \Omega$$

where Ω is an exterior domain in $\mathbf{R}^N$. Our results have higher general than existing conclusions. Information about the distribution of the zero of solutions is also obtained.

Key words: nonlinear elliptic differential equation; generalized partial Riccati transformation; oscillation; annulus criteria

考虑如下二阶非线性椭圆型微分方程

$$\nabla \cdot (A(x) \nabla y) + q(x) f(y) = e(x),\ x \in \Omega \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中一个外区域，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N})$。本文总使用如下记号：$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^+$ 分别表示区间 $(-\infty, +\infty)$，$(0, +\infty)$。记 x 的欧氏模为 $|x| = \left[\sum_{i=1}^N x_i^2\right]^{1/2}$。对于实数 $a > 0$，令 $S_a = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| = a\}$，$G(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| > a\}$，$G[a,b] = \{x \in \mathbf{R}^N : a \leqslant |x| \leqslant b\}$，$G(a,b) = \{x \in \mathbf{R}^N : a < |x| < b\}$。对于 R^N 中的外区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$（即对某个 $a_0 > 0$，$G(a_0, \infty) \subset \Omega$），本文总假设下列条件成立：

（C_1）$A(x) = (A_{ij}(x))_{N \times N}$ 是实对称正定矩阵函数（椭圆型条件）且 $A_{ij} \in C_{loc}^{1+\mu}(\Omega, \mathbf{R})$，$\mu \in (0,1)$，$i,j = 1, \cdots, N$，记 $\lambda_{max}(x)$ 为矩阵 $A(x)$ 的最大特征值且存在函数 $\lambda \in C^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$，使得 $\lambda(r) \geqslant \max_{|x|=r} \lambda_{\max}(x)$，$r > 0$；

（C_2）$q, e \in C_{loc}^{\mu}(\Omega, \mathbf{R})$，$\mu \in (0,1)$ 且 $q(x)$

* 收稿日期：2012-10-10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11271380）；广东省自然科学基金资助项目（10151601501000003）
作者简介：林全文（1965 年生），男，副教授；E-mail：linquanwen@126.com

对 $|x|\geqslant a_0(a_0>0)$ 不恒为零；

(C_3) $f\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且对所有 $y\neq 0$，$yf(y)>0$，$f'(y)\geqslant K>0$，K 为常数。

称函数 $y\in C_{loc}^{2+\mu}(\Omega,\mathbf{R}),\mu\in(0,1)$ 为方程（1）的解，如果对所有的 $x\in\Omega$，$y(x)$ 满足方程（1）。关于方程（1）解的存在性，参见文献［1］。我们仅考虑方程（1）的非平凡解 $y(x)$，即对所有 $|x|\geqslant a\geqslant a_0$ 均有 $\sup\{|y(x)|:x\in\Omega\}>0$。称方程（1）的非平凡解 $y(x)$ 是振动的，如果 $y(x)$ 的零点集 $\{x\in\Omega:y(x)=0\}$ 无界；否则，称之为非振动的。方程（1）称为是振动的，如果方程（1）的所有非平凡解均是振动的。

偏微分方程的振动理论一直受到众多学者的关注。对于如下拟线性椭圆型微分方程

$$\nabla\cdot(A(x)\nabla y)+q(x)f(y)=0 \qquad (2)$$

Noussair 和 Swanson[2] 利用如下偏 Riccati 变换

$$W(x)=-\frac{\alpha(|x|)}{f(y(x))}(A\nabla y)(x) \qquad (3)$$

将 Wintner 型定理推广到方程（2），其中 $\alpha\in C^2$ 为正函数。Swanson 在文献［3］中总结了方程（2）在 1979 年以前的振动结果。有关方程（2）的最新的一些研究结果请读者参阅文献［4－7］及其所列的参考文献。最近作者在文献［8］中利用偏 Riccati 变换技巧及 $H(r,s)$ 型函数，获得方程（2）的若干振动准则，其中的一个结果可以表述如下：

定理 A　假设 $f(y)/y\geqslant K|y|^{\gamma-1},y\neq 0,K>0,v>1$。令

$$Q(r)=\int_{S_r}[Kq(x)]^{\frac{1}{v}}|e(x)|^{1-\frac{1}{v}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$g(r)=\omega\lambda(r)r^{N-1},\Lambda(r)=\int_{a_0}^{r}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s$$

其中 $S_r=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|=r\}$，$r>0$，$\mathrm{d}\sigma$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中球面积分元，ω_N 表示 $\mathbf{R}^N$ 中单位球面表面积。若 $\lim_{r\to\infty}\Lambda(r)=\infty$，且对每个 $T\geqslant a_0$，下面的条件成立：

(A_1) 存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得

$$e(x)\begin{cases}\leqslant 0, & x\in G[a_1,b_1],\\ \geqslant 0, & x\in G[a_2,b_2]\end{cases}$$

且 $q(x)\geqslant 0$（不恒等于零），$x\in G(a_1,b_1)\cup G(a_2,b_2)$；

(A_2) 存在 $c_i\in(a_i,b_i),i=1,2$，使得 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 且下面不等式对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立：

$$\frac{1}{[\Lambda(c_i)-\Lambda(a_i)]^{\alpha-1}}\cdot\int_{a_i}^{c_i}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^{\alpha}Q(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)} \qquad (4)$$

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(c_i)]^{\alpha-1}}\cdot\int_{c_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{\alpha}Q(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)} \qquad (5)$$

则方程（1）是振动的。

2006 年，Yang [9] 在对双曲型偏微分方程的振动性的研究中，引入新的核函数 $H(r,s,l)$，得到若干新的 Kamenev 型振动准则。受此工作及 Philos[10]，Kong[11] 等工作的启发，本文定义如下函数集 $\mathscr{R}$。

定义 1　令 $E_0=\{(r,s,l):0\leqslant a_0\leqslant l<s<r<\infty\}$，$E=\{(r,s,l):0\leqslant a_0\leqslant l\leqslant s\leqslant r<\infty\}$，$H\in C^1(E,\mathbf{R})$。称 $H\in\mathscr{R}$，如果存在函数 $h\in C^1(E_0,\mathbf{R})$ 满足如下条件：

（H1）$H(r,r,l)=0;H(r,l,l)=0$，$r>l\geqslant a_0$，且 $H(r,r,l)>0$，$(r,s,l)\in E_0$。

（H2）$H(r,r,l)$ 在 E 对第二变元存在连续的偏导数且存在函数 $h\in C(E_0,\mathbf{R})$ 使得

$$\frac{\partial H(r,s,l)}{\partial s}=h(r,s,l),(r,s,l)\in E_0$$

定义 2　令 $D=\{(r,s):r\geqslant s\geqslant a_0\},D_0=\{(r,s):r>s>a_0\},H_1$ 和 $H_2\in C^1(D,\mathbf{R})$。称函数对，如果存在 h_1 和 $h_2\in C^1(D_0,\mathbf{R})$ 满足下列条件：

（H3）$H_i(r,r)=0,r\geqslant a_0$ 且 $H_i(r,s)>0$，$\forall(r,s)\in D_0,i=1,2$；

（H4）$\frac{\partial}{\partial s}(H_1(r,s))=-h_1(r,s),\forall(r,s)\in D_0$；

（H5）$\frac{\partial}{\partial s}(H_2(s,r))=h_2(s,r),\forall(s,r)\in D_0$。

将上面定义的新型函数作为核函数，建立方程（1）的若干新的振动准则。这些振动准则比现有的结果具有更高的一般性，并能得到方程（1）的解的零点分布的一些信息。

1　主要结果

为方便起见，我们引入如下记号

$$Q(r)=\int_{S_r}q(x)\mathrm{d}\sigma,\ g(r)=\frac{\omega}{K}\lambda(r)r^{N-1}$$

其中 $S_r=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|=r\},r>0$，$\mathrm{d}\sigma$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中球面积分元，ω 为 $\mathbf{R}^N$ 中单位球面积。K 为条件 (C_3) 中的常数。

定理 1　假设对任意的 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得

$$e(x)\begin{cases}\leqslant 0, & x\in G[a_1,b_1],\\ \geqslant 0, & x\in G[a_2,b_2]\end{cases} \tag{6}$$

如果存在 $H\in\mathscr{R}$ 使得

$$\int_{a_i}^{b_i}\left[H(b_i,s,a_i)Q(s)-\frac{g(s)h^2(b_i,s,a_i)}{4H(b_i,s,a_i)}\right]\mathrm{d}s>0 \tag{7}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立。则方程（1）是振动的。

证明　若不然，不失一般性设方程（1）存在非平凡解 $y(x)$ 使得 $y(x)>0,|x|\geqslant T\geqslant a_0$。定义

$$W(x)=\frac{1}{f(y)}(A\nabla y)(x),x\in G[T,+\infty) \tag{8}$$

和

$$V(r)=\int_{S_r}W(x)\cdot\gamma(x)\mathrm{d}\sigma,\qquad x\in G[T,+\infty) \tag{9}$$

其中 ∇y 为 $y(x)$ 的梯度，$\gamma(x)=\dfrac{x}{|x|}$，$|x|\neq 0$ 是 S_r 的单位外法向量。

由方程（1）及（8）式，可得

$$\nabla\cdot W(x)=-q(x)-\frac{f'(y)}{f^2(y)}(\nabla y)^{\mathrm{T}}A\nabla y+\frac{e(x)}{f(y)}\leqslant -q(x)-K(W^{\mathrm{T}}A^{-1}W)(x)+\frac{e(x)}{f(y)} \tag{10}$$

其中 W^{T} 为 W 的转置。

对 $V(r)$ 求导并利用 Green 公式得，得

$$V'(r)=\int_{S_r}\nabla\cdot W(x)\mathrm{d}\sigma\leqslant -\int_{S_r}q(x)\mathrm{d}\sigma+\int_{S_r}\frac{e(x)}{f(y(x))}\mathrm{d}\sigma-K\int_{S_r}(W^{\mathrm{T}}A^{-1}W)\mathrm{d}\sigma \tag{11}$$

依条件（C_1），有 $(W^{\mathrm{T}}A^{-1}W)(x)\geqslant\lambda_{\max}^{-1}(x)|W(x)|^2$。由 Cauchy-Schwartz 不等式，可得

$$\int_{S_r}|W(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant\frac{r^{1-N}}{\omega}\left[\int_{S_r}W(x).\gamma(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

再由（11）式及（9）式，得

$$V'(r)-Q(r)-\frac{1}{g(r)}V^2(r)+\int_{S_r}\frac{e(x)}{f(y(x))}\mathrm{d}\sigma \tag{12}$$

由假设知，可选取 $a_1,b_1\geqslant T$，使得 $e(x)\leqslant 0,x\in I_1=G[a_1,b_1](a_1<b_1)$ 且 $y(x)>0$。(若 $y(x)>0$，则选取 $a_2,b_2\geqslant T$，使得 $e(x)\geqslant 0,x\in I_2=G[a_2,b_2](a_2<b_2)$)，则在区域 I_1 或 I_2 上，(12) 式蕴含 $V(r)$ 满足

$$V'(r)\leqslant -Q(r)-\frac{1}{g(r)}V^2(r) \tag{13}$$

将（13）式的变量 r 改为 s，并两边同乘以 $H(b_i,s,a_i)$ 再从 a_i 到 $b_i(b_i\geqslant a_i\geqslant T)$ 积分得

$$\int_{a_i}^{b_i}H(b_i,s,a_i)Q(s)\mathrm{d}s\leqslant -\int_{a_i}^{b_i}H(b_i,s,a_i)V'(s)\mathrm{d}s-\int_{a_i}^{b_i}\frac{H(b_i,s,a_i)V^2(s)}{g(s)}\mathrm{d}s=\int_{a_i}^{b_i}\left[h(b_i,s,a_i)V(s)-\frac{H(b_i,s,a_i)V^2(s)}{g(s)}\right]\mathrm{d}s\leqslant\int_{a_i}^{b_i}\frac{g(s)h(b_i,s,a_i)}{4H(b_i,s,a_i)}\mathrm{d}s \tag{14}$$

即

$$\int_{a_i}^{b_i}\left[H(b_i,s,a_i)Q(x)-\frac{g(s)h^2(b_i,s,a_i)}{4H(b_i,s,a_i)}\right]\mathrm{d}s\leqslant 0$$

这与假设（7）矛盾。定理 1 证毕。

在定理 1 中取 $H(r,s,l)=H_1(r,s)H_2(s,l)$，其中（$H_1$，$H_2$）$\in\Xi$，经简单的计算，可得如下结论。

定理 2　假设对每个 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得（6）式成立。如果存在函数对（H_1，H_2）$\in\Xi$ 使得

$$\int_{a_i}^{b_i}H_1(b_i,s)H_2(s,a_i)\cdot\left\{Q(s)-\frac{g(s)}{4}\left[-\frac{h_1(b_i,s)}{H_1(b_i,s)}+\frac{h_2(s,a_i)}{H_2(s,a_i)}\right]^2\right\}\mathrm{d}s>0 \tag{15}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立。则方程（1）是振动的。

在定理 2 中若取 $H_1=(r-s)^{\alpha},H_2=(s-l)^{\beta}$，$\alpha,\beta>1$，则可得如下结论。

定理 3　假设对每个 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得（6）式成立。如果存在两个常数 $\alpha,\beta>1$ 使得

$$\int_{a_i}^{b_i}(b_i-s)^{\alpha}(s-a_i)^{\beta}\cdot\left[Q(s)-\frac{g(s)}{4}\left(\frac{\beta b_i-(\alpha+\beta)s+\alpha a_i}{(b_i-s)(s-a_i)}\right)^2\right]\mathrm{d}s>0 \tag{16}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立。则方程（1）是振动的。

定义

$$\Lambda(r)=\int_{a_0}^{r}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s,r\geqslant a_0$$

在定理 2 中取 $H_1=[\Lambda(r)-\Lambda(s)]^{\alpha},H_2=[\Lambda(s)-\Lambda(l)]^{\beta}$，其中 $\alpha,\beta>1$，可得如下振动准则。

定理 4　假设对每个 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得（6）式成立。如果存在两个常数 $\alpha,\beta>1$，使得

$$\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{\alpha}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^{\beta}\times[Q(s)-$$

$$\frac{g(s)}{4}\left(\frac{\beta\Lambda(b_i)-(\alpha+\beta)\Lambda(s)+\alpha\Lambda(a_i)}{g(s)[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)][\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]}\right)\Big]\mathrm{d}s>0 \tag{17}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立，则方程（1）是振动的。

取 $H_1=[\Lambda(r)-\Lambda(s)]^{2\alpha}$, $H_2=[\Lambda(s)-\Lambda(l)]^2$, $\alpha>\frac{1}{2}$，由定理4，可得如下结果。

定理5 设 $\lim_{r\to\infty}\Lambda(r)=\infty$。且对每个 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得（6）式成立。如果存在常数 $\alpha>\frac{1}{2}$，使得

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}\cdot$$

$$[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2Q(s)\mathrm{d}s>\frac{\alpha}{(2\alpha-1)(2\alpha+1)} \tag{18}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立，则方程（1）是振动的。

证明 注意到

$$\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha-2}\cdot$$

$$[\Lambda(b_i)-(\alpha+1)\Lambda(s)+\alpha\Lambda(a_i)]^2\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s=$$

$$\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha-2}[(\Lambda(b_i)-\Lambda(s))-\alpha(\Lambda(s))-$$

$$\Lambda(a_i))]^2\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s=\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s+$$

$$\alpha^2\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha-2}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s-$$

$$2\alpha\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha-1}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{\alpha}{(2\alpha-1)(2\alpha+1)}[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1} \tag{19}$$

由（18）－（19）式，得

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\cdot$$

$$\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2\times$$

$$\Big[Q(s)-g(s)\Big(\frac{\Lambda(b_i)-(\alpha+1)\Lambda(s)+\alpha\Lambda(a_i)}{g(s)[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)][\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]}\Big)^2\Big]\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}\cdot$$

$$[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2Q(s)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha-2}\times$$

$$[\Lambda(b_i)-(\alpha+1)\Lambda(s)+\alpha\Lambda(a_i)]^2\frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}\times$$

$$[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2Q(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{(2\alpha-1)(2\alpha+1)} \tag{20}$$

由（18）式，（20）式得

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\alpha+1}}\cdot$$

$$\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^{2\alpha}[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^2\times$$

$$\Big[Q(s)-g(s)\Big(\frac{\Lambda(b_i)-(\alpha+1)\Lambda(s)+\alpha\Lambda(a_i)}{g(s)[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)][\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]}\Big)^2\Big]\mathrm{d}s>0$$

上式蕴含（17）式当 α，β 分别用 2α 和 2 代替时（17）式成立，从而由定理 4 知，方程（1）是振动的，定理 5 证毕。

类似分析可得如下定理。

定理6 设 $\lim_{r\to\infty}\Lambda(r)=\infty$，且对每个 $T\geqslant a_0$，存在 $T\leqslant a_1<b_1\leqslant a_2<b_2$ 使得（6）式成 立。如果存在常数 $\beta>\frac{1}{2}$，使得

$$\frac{1}{[\Lambda(b_i)-\Lambda(a_i)]^{2\beta+1}}\int_{a_i}^{b_i}[\Lambda(b_i)-\Lambda(s)]^2\cdot$$

$$[\Lambda(s)-\Lambda(a_i)]^{2\beta}Q(s)\mathrm{d}s>\frac{\beta}{(2\beta-1)(2\beta+1)} \tag{21}$$

对 $i=1$ 或 $i=2$ 成立。则方程（1）是振动的。

2 例子

例1 取 $\eta_1>\eta_2>0$，则下面的非线性椭圆型微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big[\frac{\eta_1}{r}\frac{\partial y}{\partial x_1}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big[\frac{\eta_2}{r}\frac{\partial y}{\partial x_2}\Big]+\frac{\gamma\cos r}{r}(y+y^3)=\sin r \tag{22}$$

是振动的，如果

$$\gamma(-12\pi^2-144\pi+576)-\eta_1\pi^3>0$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$，$r\geqslant 1$，$N=2$。事实上

$$\lambda(r)=\frac{\eta_1}{r},q(x)=\frac{\beta\cos r}{r},f(y)=y+y^3,\omega=2\pi$$

取 $K=1$，则

$$Q(r)=\int_{S_r}q(x)\mathrm{d}\sigma=2\pi\gamma\cos r,$$

$$g(r)=\omega\lambda(r)r^{N-1}=2\pi\eta_1$$

取 $a_1=2n\pi-\frac{\pi}{2}$, $b_1=a_2=2n\pi$, $b_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 及 $\alpha=\beta=2$。则

$$\int_{a_1}^{b_1}(b_1-s)^2(s-a_1)^2\cdot$$

$$\Big\{Q(s)-g(s)\Big[\frac{b_1-2s-a_1}{(b_1-s)(s-a_1)}\Big]^2\Big\}\mathrm{d}s=$$

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi}(2n\pi-s)^2(s-2n\pi+\frac{\pi}{2})^2\cdot$$

$$\left\{Q(s)-g(s)\left[\frac{2n\pi-2s-2n\pi+\frac{\pi}{2}}{(2n\pi-s)(s-2n\pi+\frac{\pi}{2})}\right]^2\right\}ds=$$

$$2\pi\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-s\right)^2 s^2\cos(s+2n\pi-\frac{\pi}{2})ds-$$

$$2\pi\eta_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2s\right)^2ds=2\pi\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-s\right)^2 s^2\sin s ds-$$

$$2\pi\eta_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-2s)^2ds=2\pi\gamma(-\frac{\pi^2}{2}-6\pi+24)-$$

$$2\pi\eta_1\cdot\frac{\pi^3}{24}=\frac{\pi}{12}[\gamma(-12\pi^2-144\pi+576)-\eta_1\pi^3]>0$$

对 a_2，b_2类似可得

$$\int_{a_2}^{b_2}(b_2-s)^2(s-a_2)^2\cdot$$

$$\left\{Q(s)-g(s)\left[\frac{b_2-2s-a_2}{(b_2-s)(s-a_2)}\right]^2\right\}ds>0$$

由定理 3 知方程（22）是振动的。

注 1　由于引入新的核函数 $H(r,s,l)$，在特殊情况下该核函数可选取为 Philos 型振动准则的核函数的积 $H_1(r,s)H_2(s,l)$，因而定理 1－6 是新的。

注 2　由定理 1－6 可知，通过适当选取 $H(r,s,l)$，$(H_1,H_2)\in\Xi$，可得到有关方程（1）的不同的振动准则。例如可取 $H(r,s,l)=H_1(r,s)H_2(s,l)$ 其中 $H_1(r,s)=(r-s)^{\alpha}$，$H_2(s,l)=(s-l)^{\beta}$，$H_1(r,s)=[\Lambda(r)-\Lambda(s)]^{\alpha}$，$H_2(s,l)=[\Lambda(s)-\Lambda(l)]^{\beta}$，或 $H_1(r,s)=[\log Q(r)/Q(s)]^{\alpha}$，$H_2(s,l)=[\log Q(s)/Q(l)]^{\beta}$，或 $H_1(r,s)=\left[\int_s^r dz/w(z)\right]^{\alpha}$，$H_2(s,l)=\left[\int_l^s dz/w(z)\right]^{\beta}$，或 $H_1(r,s)=\rho(r-s)$，$H_2(s,l)=\rho(s-l)$)，$r\geqslant s\geqslant a_0$，等等，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$ 为常数，$\Lambda(r)=\int_{a_0}^r ds/u(s)$，$Q(r)=\int_r^{\infty}ds/u(s)<\infty$，$r\geqslant a_0$，$w\in C([a_0,\infty),(0,1))$ 满足 $\int_{a_0}^{\infty}\frac{1}{w(z)}dz=\infty$，$\rho(0)>0$，$\rho(u)>0$ 且 $\rho'(u)\geqslant 0$，$u>0$。

参考文献：

[1] GILBAG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order [M]. New York: Spinger－Verlag, 1983.

[2] NOUSSAIR E S, SWANSON C A. Oscillation of simlinear elliptic inequalities by Riccati transformation [J]. Canad J Math, 1980, 32(4): 908－923.

[3] SWANSON C A. Semilinear second order elliptic oscillation [J]. Canada Math Bull, 1979, 22: 139－157.

[4] XU Z T. Riccati techniques and oscillation of semilinear elliptic equations [J]. Chin Ann of Math, Ser A, 2003, 24(5): 565－574.

[5] XU Z T. Oscillation and nonoscillation of solutions of second order damped elliptic differential equations [J]. Acta Mathematical Sinica, Chinese Series, 2004, 47(6): 1099－1106.

[6] XU Z T, XING H Y. Kamenev-type oscillation criteria for semilinear elliptic differential equation [J]. Northeast Math J, 2004, 20(2): 153－160.

[7] ZHUANG R K, WANG Q R, ZHU S M. Domain oscillation criteria for second order nonlinear elliptic differential equations [J]. Acta Mathematical Sinica, Chinese Series, 2005, 48(3): 527－534.

[8] ZHUANG R K. Annulus oscillation criteria for second-order nonlinear elliptic differential equations [J]. J Comput Appl Math, 2008, 271(1): 268－276.

[9] YANG Q. On the oscillation of certain nonlinear neutral partial differential equations [J]. Appl Math Lett, 2007, 20(8): 900－907.

[10] PHILOS GH G. Oscillation theorems for linear differential equations of second order [J]. Arch Math, 1989, 53: 483－492.

[11] KONG Q K. Interval criteria for oscillation of second order linear differential equations [J]. J Math Anal Appl, 1999, 229: 258－270.